UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
AGADIR

Octobre 2010

TD de Mécanique du solide
SM3 Série n° 1

Exercice 1

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct et soit $\overrightarrow{M}_t$ le champ de vecteurs défini par :

$$\overrightarrow{M_t}(P) = \begin{pmatrix} 1+3y-tz \\ -3x+2tz \\ 2+tx-t^2 y \end{pmatrix}$$

Où (x, y, z) sont les coordonnées du point P dans (R) et t un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de t ce champ est associé à un torseur ?
2. Lorsque c'est un torseur, calculer sa résultante.

Exercice 2

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A(3, 0, 0)$ et $B(-1, 2, 1)$ deux points de l'espace. Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur équiprojectif défini tel que :

$$\overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V(A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V(B)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la résultante $\vec{R}$ du torseur $[T]$ associé au champ $\vec{V}$.
2. En déduire $\vec{V}(M)$ en tout point $M(x, y, z)$ de l'espace.
3. Déterminer l'axe central Δ du torseur, et calculer $\vec{V}$ sur Δ.

Exercice 3

Soient deux torseurs $[T_1]_B$ et $[T_2]_B$ définis en un point B, par leurs éléments de réduction ; par rapport à une base orthonormée directe $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$[T_1]_B = \begin{cases} \vec{R}_1 = 2\vec{x} + \vec{y} + 3\vec{z} \\ \vec{M}_1(B) = -3\vec{x} + 2\vec{y} - 4\vec{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_B = \begin{cases} \vec{R}_2 = 4\vec{x} + \vec{y} - 3\vec{z} \\ \vec{M}_2(B) = 3\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} \end{cases}$$

1. Montrer que les axes centraux des deux torseurs sont perpendiculaires.
2. Calculer l'invariant scalaire du torseur $[T_1]$.
3. Déterminez l'axe central du torseur $[T_1]$.
4. Calculer le pas du torseur $[T_2]$.
5. Construire le torseur $[T]_B = [T_1]_B + [T_2]_B$.
   a) De quel type est le torseur somme ?
   b) Représenter le système équivalent si le point B a pour coordonnée (4, 0, 0).

TD de Mécanique du solide

SM3 Série n°1-corrigé

Exercice 1

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct et soit $\overrightarrow{M_t}$ le champ de vecteurs défini par :

$$\overrightarrow{M_t}(P)=\begin{pmatrix} 1+3y-tz \\ -3x+2tz \\ 2+tx-t^2y \end{pmatrix}$$

Où (x, y, z) sont les coordonnées du point P dans (R) et t un paramètre réel.

1. Les valeurs de t pour lesquelles ce champ est associé à un torseur :

$\overrightarrow{M_t}(P)$ est un champ associé à un torseur s'il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{M_t}(P)=\overrightarrow{M_t}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}$$

O étant l'origine du repère (R).

$$\overrightarrow{M_t}(P)=\begin{pmatrix} 1+3y-tz \\ -3x+2tz \\ 2+tx-t^2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+R_2z-R_3y \\ R_3x-R_1z \\ 2+R_1y-R_2x \end{pmatrix}$$

On trouve que : $R_1 = -2t = t^2$; $R_2 = -t$ et $R_3 = -3$ soit $t = 0$ ou $t = 2$.

2. Pour $t = 0$, la résultante du torseur est :

$$\overrightarrow{R_0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour $t = 2$, la résultante du torseur est :

$$\overrightarrow{R_2}=\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. la résultante $\vec{R}$ du torseur $[T]$ associé au champ $\vec{V}$ est telle que :

$$\vec{V}(A)=\vec{V}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OA}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+3R_3 \\ 4-3R_2 \end{pmatrix}$$

Soit $R_3 = 0$ et $R_2 = 1$.

On a aussi : $$\vec{V}(B)=\vec{V}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+R_2-2R_3 \\ 1-R_3-R_1 \\ 4+2R_1+R_2 \end{pmatrix}$$

Soit pour $R_3 = 0$ et $R_2 = 1$ on trouve que $R_1 = 2$.

2. $\vec{V}(M)$ en tout point $M(x, y, z)$ de l'espace est tel que :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z \\ 1-2z \\ 4-x+2y \end{pmatrix}$$

On peut vérifier pour $\vec{V}(A)$ et $\vec{V}(B)$.

3. Détermination de l'axe central Δ du torseur et calcul de $\vec{V}$ sur Δ.

$$\left\{\forall P \in \Delta / \quad \overrightarrow{V(P)} // \vec{R}\right\}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{V}(P) = \vec{R} \wedge \vec{V}(O) + \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{V}(O) + (\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP})\vec{R} - (\vec{R})^2 \overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

En posant le scalaire $\alpha = \dfrac{(\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP})}{(\vec{R})^2}$, on aura : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{V}(O)}{(\vec{R})^2} + \alpha \vec{R}$

$$\vec{R} \wedge \vec{V}(O) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } (\vec{R})^2 = 4+1 = 5$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après identification et élimination du scalaire α, l'équation de la droite Δ est donnée par :

$$y = \frac{x}{2} - 2 \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{5},$$

c'est une droite contenue dans un plan parallèle au plan *(O,x,y)* situé à la côte $z = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 3

1. *L'axe central d'un torseur est parallèle à sa résultante.*

   L'axe central de $[T_1]_B$ est parallèle à $\vec{R_1}$; l'axe central de $[T_2]_B$ est parallèle à $\vec{R_2}$, s'ils sont perpendiculaires nous aurons : $\vec{R_1} . \vec{R_2} = \vec{0}$

   $\vec{R_1} . \vec{R_2} = (2\vec{x} + \vec{y} + 3\vec{z}).(4\vec{x} + \vec{y} - 3\vec{z}) = 0$ ce qui est vérifié.
2. *Automoment du torseur* $[T_1]_B$

   $A = \vec{R_1} . \overrightarrow{M_1}(B) = -6 + 2 - 12 = -16$
3. *Axe central du torseur* $[T_1]_B$: $\forall P \in$ à l'axe central, le moment en ce point est parallèle à la résultante: $\overrightarrow{M_1}(P) = \lambda \vec{R_1}$, son équation vectorielle est donnée par :

   $$\overrightarrow{BP} = \frac{\vec{R_1} \wedge \overrightarrow{M_1}(B)}{(\vec{R_1})^2} + \alpha \vec{R_1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 + 2\alpha \\ -1/14 + \alpha \\ 1/2 + 3\alpha \end{pmatrix}$$

4. *Pas du torseur* $[T_2]_B$: $P_2 = \dfrac{\vec{R_2} \cdot \overrightarrow{M_2}(B)}{(\overrightarrow{R_2})^2} = \dfrac{12-2-12}{26} = -\dfrac{1}{13}$

5. *Torseur somme* $[T]_B = [T_1]_B + [T_2]_B$; $[T]_B = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} = 6\vec{x} + 2\vec{y} \\ \overrightarrow{M}(B) = \overrightarrow{M_1}(B) + \overrightarrow{M_2}(B) = \vec{0} \end{cases}$

a) c'est un glisseur car le moment au point *B* est nul ;

b) l'axe central est parallèle à la résultante, il s'écrit pour deux points B et C appartenant à cet axe :

$$\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M}(B)}{(\vec{R})^2} + \alpha\, \vec{R} = \alpha \vec{R} = 6\alpha\, \vec{x} + 2\alpha\, \vec{y}$$

C'est l'équation d'une droite parallèle à la résultante.